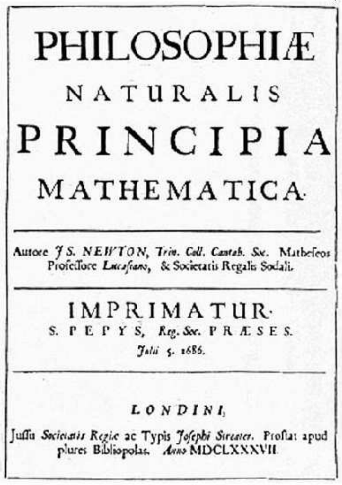
6 Spezielle Relativitätstheorie

6.1 Die klassische Physik vor der Relativitätstheorie

I. Newton *(Principia Mathematica):*
„Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich... Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand.“


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

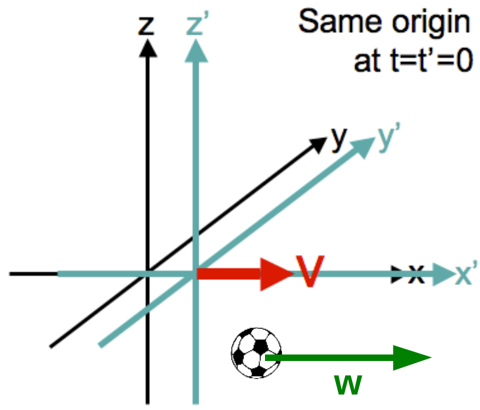
Innerhalb des absoluten Raums gibt es (unendlich viele) relative Räume eines konstant bewegten Beobachters, sogenannte **Inertialsysteme**.
Diese sind **gleichberechtigt**, in ihnen
gelten dieselben physikalischen Gesetze.

Beispiel:
Fußgänger am Straßenrand stehend ↔ Autofahrer mit konstanter Geschwindigkeit.
Der Autofahrer misst für Gegenstände im Auto andere Geschwindigkeiten, als der Fußgänger. Trotzdem kommen beide mit den selben physik. Gesetzen (z.B. $F = \mathrm{d}p / \mathrm{d}t$) im jeweiligen Inertialsystem zu korrekten Vorhersagen.

Um physik. Aussagen zwischen zwei Bezugssystemen in Beziehung zu bringen, müssen die Koordinaten und Geschwindigkeiten transformiert werden.

→ **Galilei-Transformation:**

Betrachten zwei Beobachter deren Koordinatensystem **Σ** und **Σ'** zur Zeit 0 denselben Ursprung hat, die sich aber mit der Geschw. ***v*** in x-Richtung bewegt.



Ihre Koordinaten sind dann folgendermaßen verknüpft:

$$\begin{aligned} x' &= x - v\,t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

Betrachtet Beobachter 1 in **Σ** ein Objekt, das sich mit Geschwindigkeit ***w*** in x-Richtung bewegt, so sieht Beobachter 2 in **Σ'** folgende Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} w'_x &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x - vt) = w_x - v \\ w'_y &= w_y = 0 \\ w'_z &= w_z = 0 \end{aligned}$$

Problem Elektromagnetismus:

Maxwell-Gleichungen sind **nicht Galilei-invariant**:

Wellengleichung in einem beliebigen Inertialsystem: $\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

in einem anderen, dazu bewegten Inertialsystem, gilt nach Galilei-Transformation

$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$ und $E_x(x,\, t) = E_x(x' + vt',\, t')$

Ortsableitung: $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'}$, also $\Delta E_x = \Delta' E_x$

Zeitableitung: $\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial x'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{=-v} + \frac{\partial E_x}{\partial t'}\underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_{=1} = -v\frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\partial E_x}{\partial t'}$

also $\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 E_x}{\partial x'^2} - 2v\frac{\partial^2 E_x}{\partial x'\partial t'} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial t'^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 E_x$

→ **Wellengleichung im bewegten System** $\Delta'\vec{E} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - u\vec{\nabla}'\right)^2 \vec{E}$

besitzt also eine andere Gestalt!

mögliche Auswege:

- Maxwell-Gleichungen sind falsch:
  klassische elektrodynamische Phänomene werden allerdings umfassend durch die Maxwell-Gln. beschrieben

- Galilei-Transformation stimmt nicht.
  plausibel?

- Relativitätsprinzip stimmt nicht, d.h. es gibt ein ausgezeichnetes Inertialsystem, in dem die Maxwell-Gln. exakt stimmen:
  naheliegende Lösung → Suche nach diesem ausgeichneten System: Äther?

Der elektrodynamische Äther

Existenz eines „Trägermediums“ für elektromagnetische Wellen
(vgl.Schallwellen als Dichtewellen eines Stoffes)
→ hypotetischer Stoff: „Äther“, der Lichtausbreitung auch im „Vakuum“ erlaubt

Maxwellsche Gleichungen enthalten Lichtgeschwindigkeit c , deren Deutung auf Schwierigkeiten stößt:

- der Äther, hat bizarre Eigenschaften (Elastizität: sehr hoch wegen hoher Lichtgeschwindigkeit; Dichte: sehr gering, weil Erde und Planeten auf ihren Bahnen nicht gebremst werden)

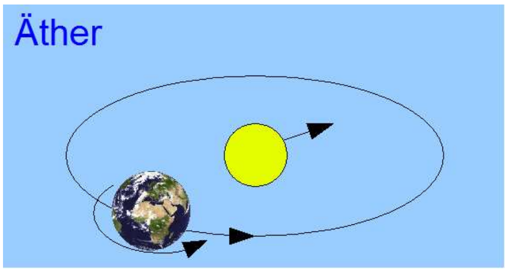
- Ein ausgezeichnetes (gegen Äther ruhendes) Bezugssystem sollte zu finden sein

→ Suche nach geeigneten Experimenten zum Nachweis eines Äthers

6.2 Michelson-Morley-Experiment

1881-1887 versuchten Michelson und Morley mittels eines Interferometers den Nachweis eines Mediums der Lichtausbreitung (sog. Äther) zu erbringen.

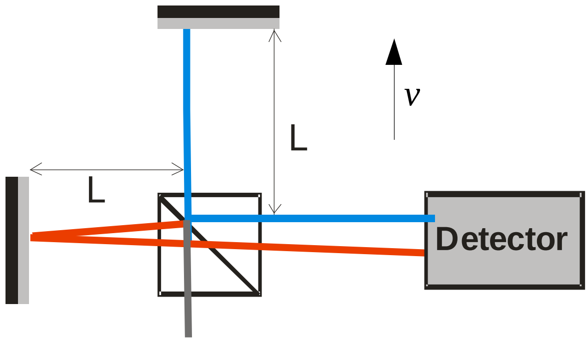
Idee: Erde und Sonne bewegen sich durch den Ätherhintergrund mit Gesamtgeschw. v.



In einem **drehbaren Michelson-Interferometer**, welches wie im Bild ausgerichtet wird, sollte das Licht im **parallelen Arm** die Geschwindigkeit
c-v auf dem Weg „nach vorne“ und
c+v auf dem Weg „zurück“ haben

→ Laufzeitunterschied:

$$t_{||} = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L/c}{1-v^2/c^2} \approx \frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$



Der Strahl im senkrechten Arm sollte dagegen eine seitliche Verschiebung erfahren.

→ Laufzeitunterschied:

$$t_{\perp} = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx \frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

→ bei geeigneter Orientierung des Interferometers müsste man eine Phasenverschiebung von $\Delta\phi = \omega\,\Delta t \approx \omega L\frac{v^2}{c^3}$ sehen, bei einer Drehung des Experiments um 90° entsprechend $\Delta\phi \approx -\omega L\frac{v^2}{c^3}$

Im Originalexperiment war $L = 11$ m und die Wellenlänge $\lambda = 500$ nm.
Die Bahngeschwindigkeit der Erde beträgt $v \approx 30$ km/s.

Man würde also eine Phasenverschiebung um

$$2\Delta\phi \approx 2\pi \times \frac{2L}{\lambda}\,\frac{v^2}{c^2} \approx 0,44 \times 2\pi$$

erwarten (also beinahe eine Umkehrung von konstruktiver und destruktiver Interferenz).

Diese wurde aber nicht beobachtet, auch nicht zu versch. Zeiten an versch. Orten.

→ Unterschiedlich schnell bewegte Beobachter sehen trotzdem stets dieselbe Lichtgeschwindigkeit. Dies ist ein **Widerspruch zur Newtonschen Physik** und wurde von Einstein zum Postulat seiner Relativitätstheorie erhoben:

In allen Inertialsystemen hat die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum den gleichen Wert.

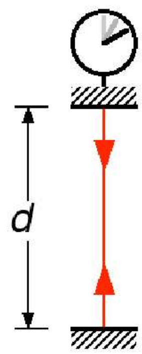
Zusätzlich postulierte er das **Relativitätsprinzip**:

Alle Inertialsysteme sind zur Beschreibung von Naturvorgängen gleichberechtigt. Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form.

6.3 Zeitdilatation

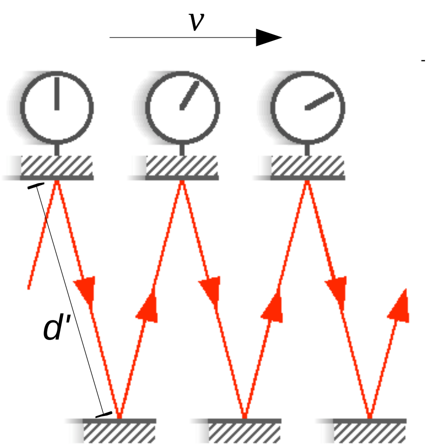
Lichtuhr: Zweitmessung mithilfe der konstanten Lichtgeschwindigkeit.

Lichtpulse werden zwischen 2 Spiegeln hin- und herreflektiert.
Eine Zeiteinheit = Zeit zwischen dem Auftreffen des Lichtpulses auf einen Spiegel: $\Delta T_{\text{ruh}} = d/c$



Oben: Situation, wie sie ein ruhender Beobachter (zB auf der Erde) im Inertialsystem der Uhr sieht.

Unten: Situation für eine sich dazu bewegender Beobachter in einem Raumschiff mit Geschw. v. Der Erdbeobachter sieht, dass die Lichtpulse eine größere Strecke & längere Zeit zurücklegen müssen, während c gleich bleibt.



Die größere Strecke ist: $d' = \sqrt{d^2 + (v\,\Delta T_{\text{bew}})^2}$

Für die bewegte Uhr vergangene Zeit: $\Delta T_{\text{bew}} = d'/c$

Als Zeit zwischen zwei Reflexionen misst der ruhende Beobachter an der bewegten Uhr also: $\Delta T_{\mathrm{bew}} = \Delta T_{\mathrm{ruh}} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$

Für $0 < v < c$ geht also die bewegte Uhr langsamer als die ruhende.

Zeitdilatation (Zeitdehnung):

Bewegte Uhren gehen langsamer.

Die von einer ruhenden Uhr gemessene Zeitspanne für einen Vorgang in einem bewegten Inertialsystem ist, verglichen mit der Zeitspanne im ruhenden System der Uhr, länger:

$$\boxed{t_{\mathrm{bew}} = t_{\mathrm{ruh}} \sqrt{1 - v^2/c^2} \leq t_{\mathrm{ruh}}}$$

Dies ist keine Eigenschaft der speziellen Lichtuhr, da man ja jeden anderen Uhrentyp im selben IS einmal auf diese Lichtuhr eichen kann. Beiden messen ab dann die selben Zeitintervalle. Diese Aussage gilt also nicht nur für Uhren sondern für jeden zeitabhängigen Vorgang.

Wegen der Form des Zeitfaktors, $\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ sieht man:

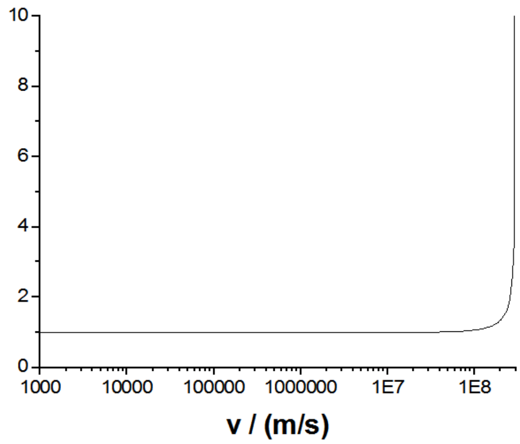
1. für Objekte, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, wird $\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \to \infty$ für sie vergeht keine Zeit!

2. Objekte können keine Geschwindigkeiten v > c annehmen, da sonst wegen $1 - v^2/c^2 < 0$ die Wurzel negativ wäre

→ Ein physikalisches Signal bewegt sich *<u>höchstens</u>* mit Lichtgeschwindigkeit:

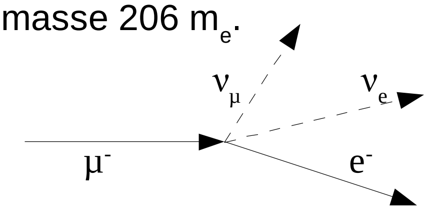
$$v \leq c$$

Beispiele:	Zeitdillatation $\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
Auto mit 100 km/h	$1 + 4{,}2 \cdot 10^{-15}$
Flugzeug mit 1000 km/h	$1 + 4{,}3 \cdot 10^{-13}$
50% c	1,55
99% c	7,09
99,9% c	22,4



Nachweis der Zeitdilatation aus dem Myonenzerfall

- Myonen sind Elementarteilchen mit Ladung -e und Ruhemasse 206 m_e.

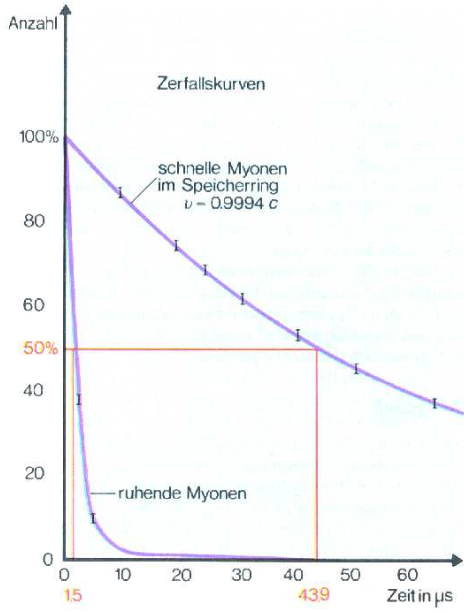


- Sie entstehen z.B. in der Erdatmosphäre in ca. 10 km Höhe bei Reaktionen kosmischer Strahlung mit dem Atmosphärengas.
- Sie zerfallen mit einer Lebensdauer von $\tau = 1{,}5\ \mu\mathrm{s}$ in zwei Neutrinos und ein Elektron

Diese atmosphärischen Myonen haben Geschwindigkeiten nahe c und hätten daher eine typ. Reichweite von ca. $\tau\, c = 500\ \mathrm{m}$.

Trotzdem werden auf der Erdoberfläche noch sehr hohe Raten an Myonen gemessen. Dies ist eine direkte Folge der Zeitdillatation, da für diese schnellen Myonen eine Halbwertszeit von ca. 13 µs gemessen wird.

Experimente in Teilchenbeschleunigern bestätigen dies.



[Metzler Physik]

6.4 Lorentz-Kontraktion

Betrachten ein Beispiel:

Ein Myon entsteht in 10 km Höhe über Erdoberfläche, mit einer Geschwindigkeit von 0,999 c.

Dieses eine Myon zerfalle nach genau 1,5 µs in seiner Eigenzeit, im System der Erde wären dies $\tau_{\mathrm{Erde}} = 1,5\ \mu\mathrm{s}/\sqrt{1-0.999^2} = 33,5\ \mu\mathrm{s}$

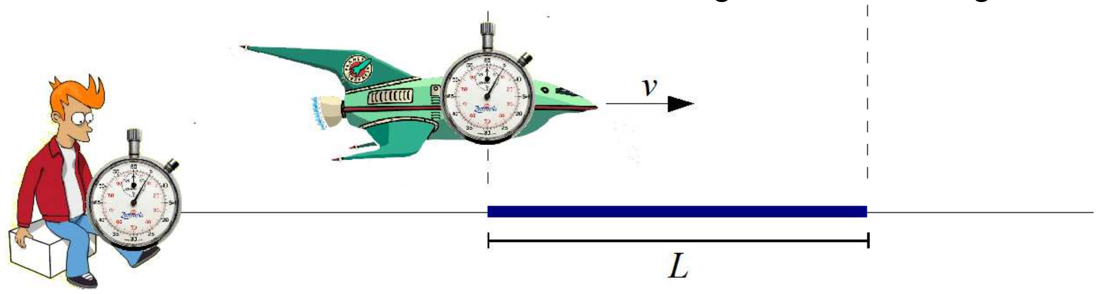
Ein **Beobachter auf der Erde** sieht den Myonzerfall nach einer Strecke von $s = \tau_{\mathrm{Erde}} c = 33,5\ \mu\mathrm{s} \times 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s} = 10\ \mathrm{km}$, also genau auf der Erdoberfläche.

Was aber sieht ein Beobachter, der sich mit gleicher Geschwindigkeit parallel zum Myon bewegt?
Für diesen lebt das Myon nur 1,5 µs.
und zerfällt nach einer Strecke von $s_{\mathrm{Myon}} = 1,5\ \mu\mathrm{s} \times c = 0,45\ \mathrm{km}$
also weit in der Atmosphäre.

Wie lässt sich dieses Paradoxon auflösen?

→ **Definition einer Strecke aus der Zeit die man für den Vorbeiflug braucht.**

Betrachten einen ruhenden Maßstab der Länge L ,
an dem ein Raumschiff mit Uhr mit der Geschwindigkeit v vorbeifliegt:



Zeit zwischen Vorbeiflug am vorderen und hinteren Ende des Maßstabs:

Der Beobachter im Ruhesystem des Maßstabs misst: $\Delta T_{\text{ruh}} = L/v$

Die Zeit, die der ruhende Beobachter an der Raumschiff-Stoppuhr abließt:

$$\Delta T_{\text{bew}} = \Delta T_{\text{ruh}} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Das ist auch die Zeit, die der Beobachter im Raumschiff zwischen dem Vorbeiflug am vorderen und hinteren Ende misst.

Der Beobachter im Raumschiff kann nun aus $L_{\text{bew}} = v \Delta T_{\text{bew}}$
die Länge des (aus seiner Sicht bewegten) Maßstabs bestimmen:

$$\boxed{L_{\text{bew}} = L\sqrt{1 - v^2/c^2} \leq L}$$

Dieser Effekt nennt man

Lorentz-Kontraktion:

Bewegte Maßstäbe sind in Bewegungsrichtung verkürzt

ruhender Beobachter

Lorentz-Kontraktion für einen Beobachter mit 0,9 c

Da aber das Licht, das vom den weiter weg liegenden Hauswänden/-dächern gestreut wird verzögert ankommt, sieht der Beobachter mit 0,9 c die Häuserfront gedreht und verzerrt:

aus: www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de

Visualisierung der Lorentz-Kontraktion:

ruhender Beobachter

Beobachter mit 0,8 c

Beobachter mit 0,95 c

Beobachter mit 0,99 c

aus: www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de

6.5 Gleichzeitigkeit

Kehren wir die Perspektiven von den Beobachter auf Erde & Raumschiff um:

Wegen des Relativitätsprinzips müssen die gleichen physik. Gesetze gelten.

→ Es wird dieselbe Zeitdilatation gesehen.

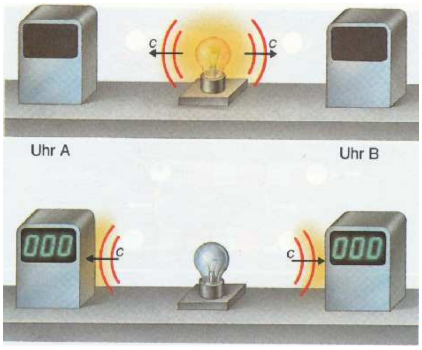
→ Der Beobachter im Raumschiff sieht, dass Uhren auf der Erde langsamer gehen.

Frage: Was geschieht also mit „gleichzeitigen“ Ereignissen?

Dazu ist es zunächst einmal nötig, entfernte Uhren synchronisieren zu können.

Einstein-Synchronisation:

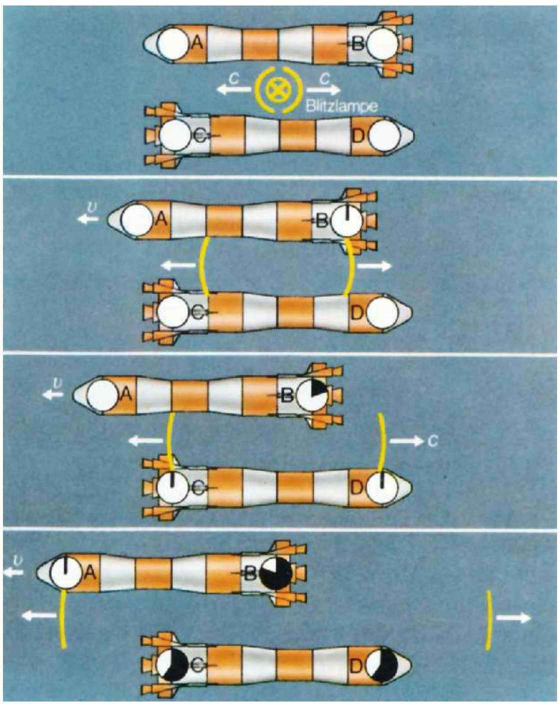
In der geometrischen Mitte beider Uhren werden Lichtsignal ausgesandt, die bei ihrer Ankunft die Uhren in Gang setzen.



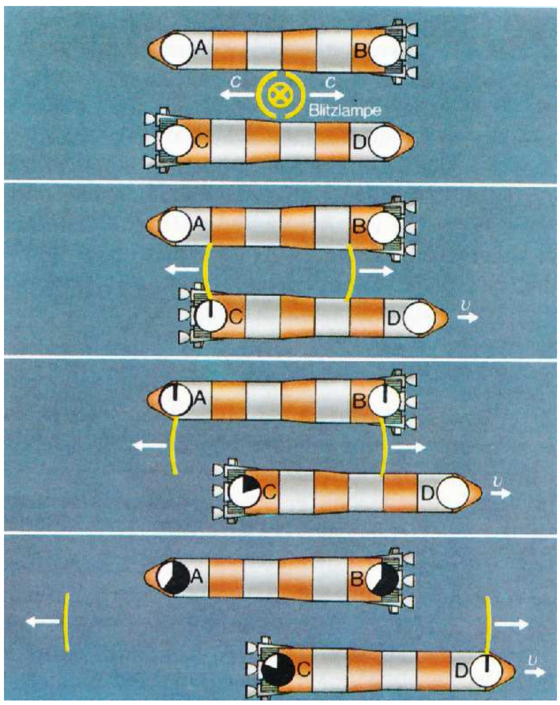
[Metzler Physik]

Gedankenexperiment:

Uhren an Bug und Heck zweier aneinander vorbeifliegende Raketen (Geschwindigkeiten nahe c) werden von einer Blitzlampe in deren Mitte synchronisiert, sobald die Raketen auf gleicher Höhe sind:



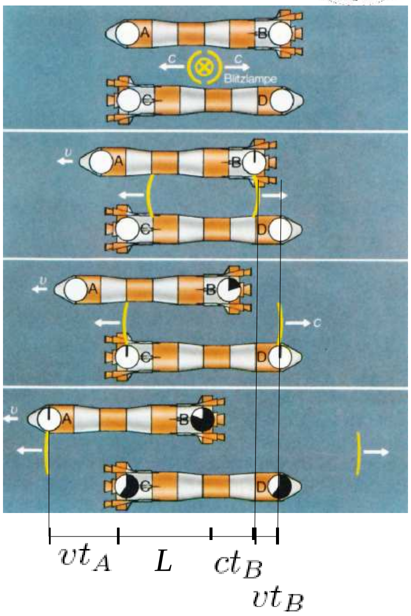
aus Sicht der **unteren** Rakete



aus Sicht der **oberen** Rakete

[Metzler Physik]

Quantitative Betrachtung aus Sicht der unteren Rakete:



Ankunftszeit des Lichtpulses in Punkt C & D:

in beiden Fällen $t_{C,D} = L/c$

(L sei Abstand der Uhren von der Raketenmitte),
die Signale kommen also gleichzeitig an.

Ankunftszeit in Punkt A: aus $L + vt_A = ct_A$

$\rightarrow \; t_A = L/(c+v)$

analog in Punkt B: $ct_B + vt_B = L \quad \rightarrow \; t_B = L/(c-v)$

Uhren A und B in oberer Rakete
werden nicht gleichzeitig gestartet.

In der **Newtonschen Physik** wäre dagegen die Lichtgeschwindigkeit nicht konstant:

$$L + vt_A = (c+v)t_A \quad \text{und} \quad (c-v)t_B + vt_B = L$$

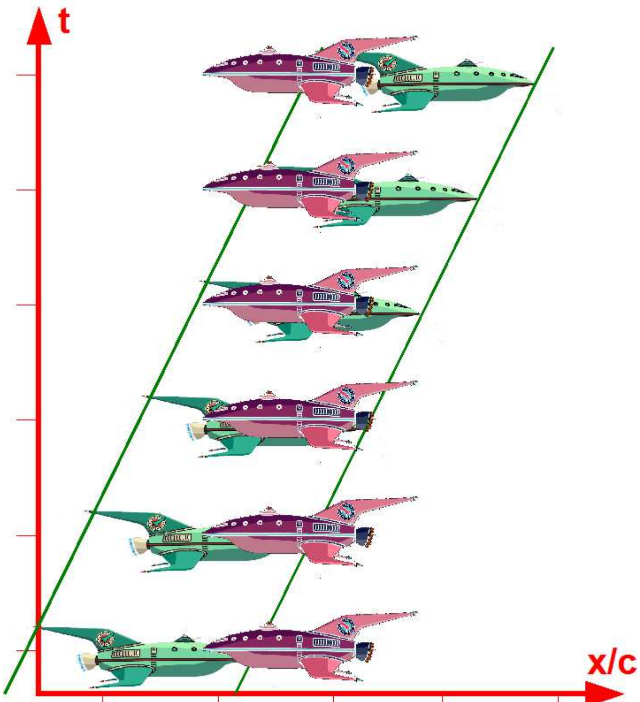
und somit beide Male: $t_{A,B} = L/c$

→ im eigenen **ruhenden Inertialsystem** werden in beiden Raketen jeweils die Uhren an Bug & Heck **gleichzeitig** gestartet.
Die Uhren der jeweils anderen, **bewegten Rakete** starten dagegen
nicht gleichzeitig.

→ 2 Ereignisse die an verschiedenen Orten stattfinden und von einem Inertialsystem aus als gleichzeitig angesehen werden, finden aus Sicht eines dazu bewegten Beobachters nicht gleichzeitig statt.

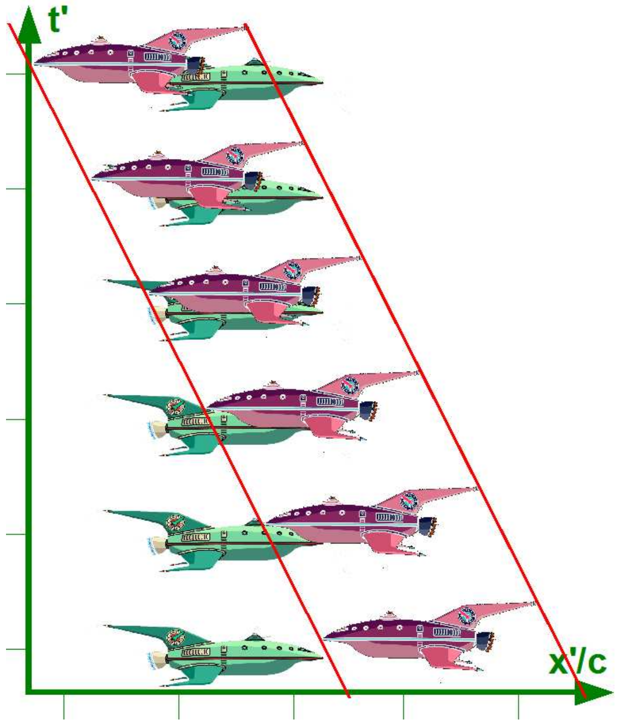
6.6 Raum-Zeit-Diagramme

Darstellung im Raum-Zeit-Diagramm:



im Ruhesystem von **Raumschiff 1**

Steigung der grünen Gerade $v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
→ Geschw. **Raumschiff 2**



im Ruhesystem von **Raumschiff 2**

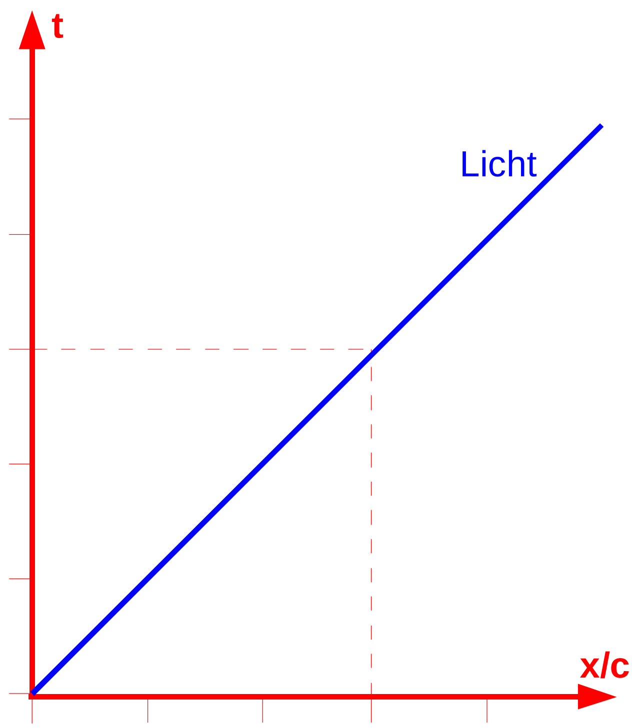
Steigung der roten Gerade $v_1' = \frac{\Delta s'}{\Delta t'}$
→ Geschw. **Raumschiff 1**

Achsenskalierung wird so gewählt, dass:

1. die Einheiten gleich sind
hier : Zeitachse t in sek.,
Ortsachse durch c geteilt: x/c
→ Einheit in Lichtsekunden

(alternativ Zeit: c*t, Ort: x)

2. ein Objekt mit Lichtgeschwindigkeit
sich auf einer Bahn mit 45°
(Winkelhalbierenden) bewegt

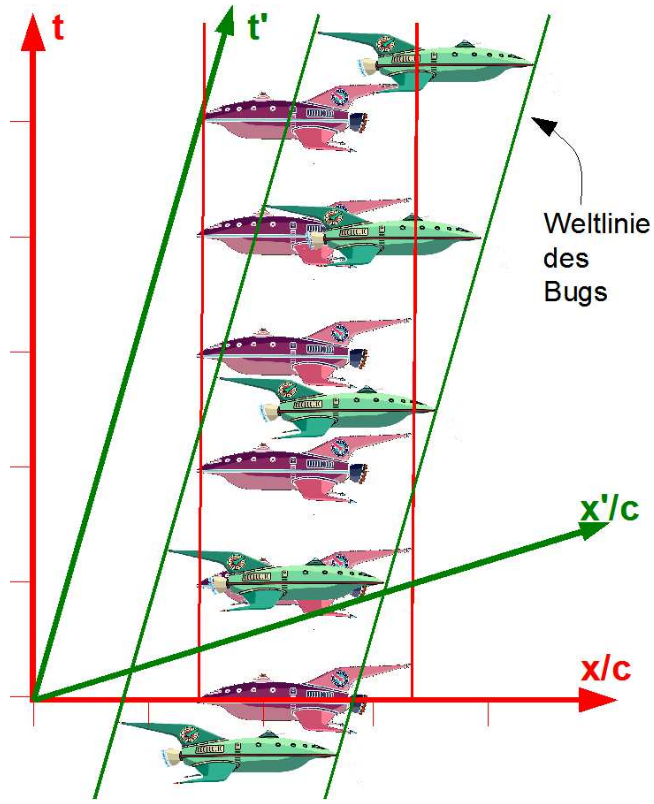


Versuch, beide Situationen in einem Diagramm darzustellen
→ **Minkowski-Diagramme:**

Das Koordinatensystem des bewegten Beobachters wird unter einem gewissen Winkel eingezeichnet.

Gleichzeitig Ereignisse bzw. Ereignisse am selben Ort befinden sich im jew. Koordinatensystem auf Linien parallel zur Zeit bzw. Ortsachse.

Linien entlang derer sich ein Objekt im Raum-Zeit-Diagramm bewegt (z.B. Bug des grünen Raumschiffs) heißen **Weltlinien.**

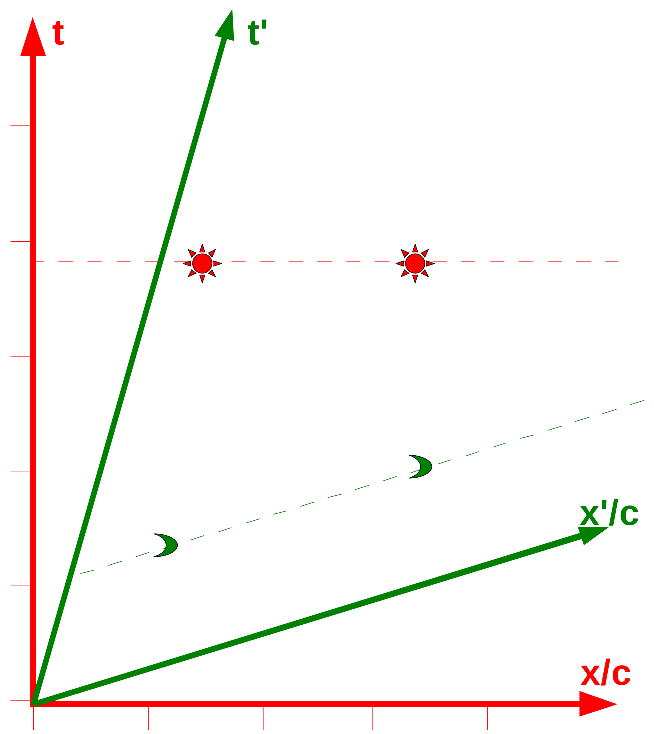


Beispiel:

- 2 gleichzeitige Ereignisse für **Raumschiff 1**
- 2 gleichzeitige Ereignisse für **Raumschiff 2**

Ereignis = **Punkt im Raumzeitdiagramm**, d.h. etwas, das zu einem definierten Zeitpunkt t an einem definierten Ort r = (x,y,z) geschieht.

Ereignisse haben also in dieser Definition **keine Dauer und keine Ausdehnung.**



Wie müssen nun der Winkel und die Achsenskalierung der verdrehten Achsen gewählt werden?

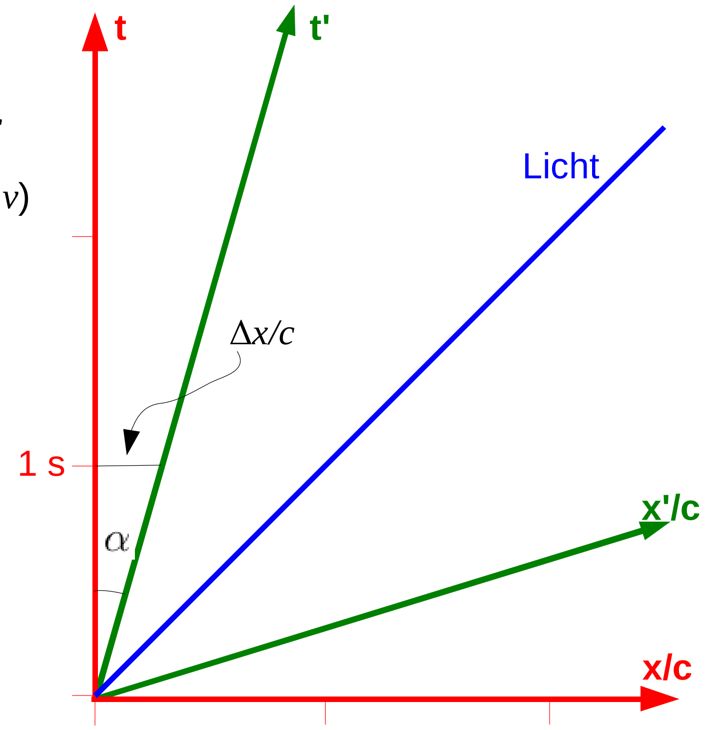
Betrachten Zeiteinheiten von **1 s** und Ortseinheiten von **1 Lichtsekunde** = **(1 s)** $\boldsymbol{c}$

in 1 s legt **Raumschiff 2** (Geschwindigkeit v) die Strecke $\Delta x = (1\ \mathrm{s})\ v$ zurück

→ Winkel zwischen t & t'-Achse:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta x/c}{\Delta t} = \frac{1\,\mathrm{s}\ v/c}{1\,\mathrm{s}} = \frac{v}{c}$$

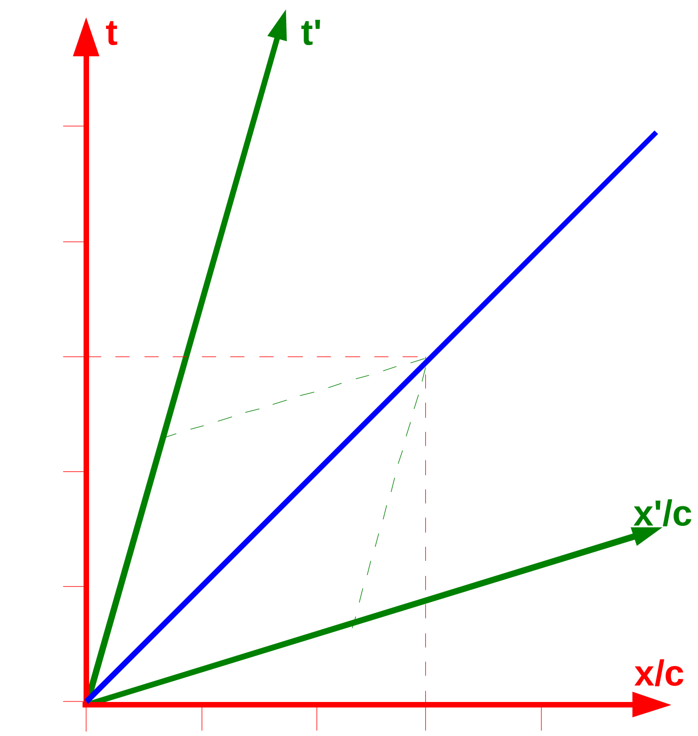
→ Objekte mit **Lichtgeschwindigkeit** haben den Winkel $\arctan 1 = \mathbf{45°}$.



Da die Lichtgeschwindigkeit in beiden Bezugssystemen gleich ist muss auch der Winkel zwischen x & x'-Achse

$$\tan\alpha = \frac{v}{c}$$

sein.

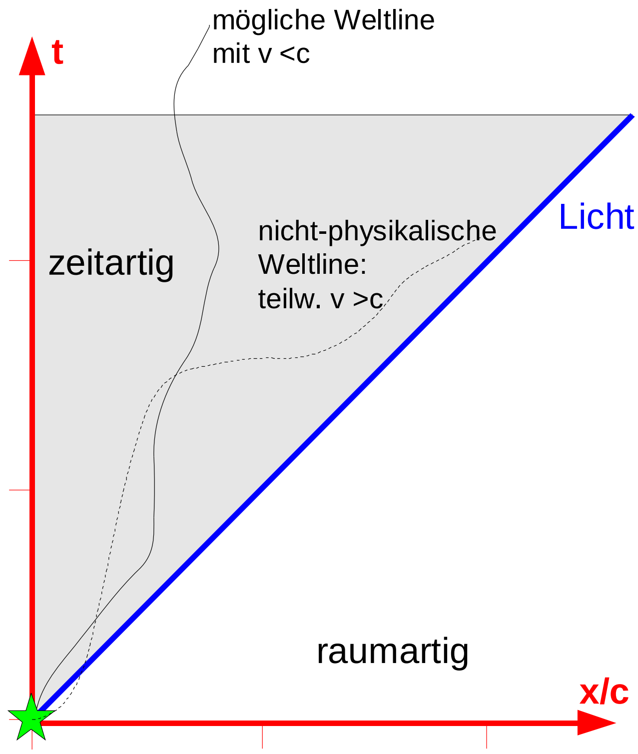


da die c die maximale Geschwindigkeit für physikalische Objekte ist, haben Weltlinien zur t-Achse höchstens den Winkel 45° bzw.:

$$\tan\alpha = \frac{v}{c} < 1$$

→ nur Bereiche oberhalb des **Lichtkegels** und darauf können von einem Ereignis (★) im Ursprung des Koordinatensystems **kausal beeinflusst** werden (z.B. durch Austausch von Signalen). Bereiche oberhalb heißen **zeitartig**.

Bereiche unterhalb des Lichtkegels heißen **raumartig**. Zwischen ihnen und dem Ursprung kann **kein kausaler Zusammenhang** bestehen.



Signale mit Überlichtgeschwindigkeit?

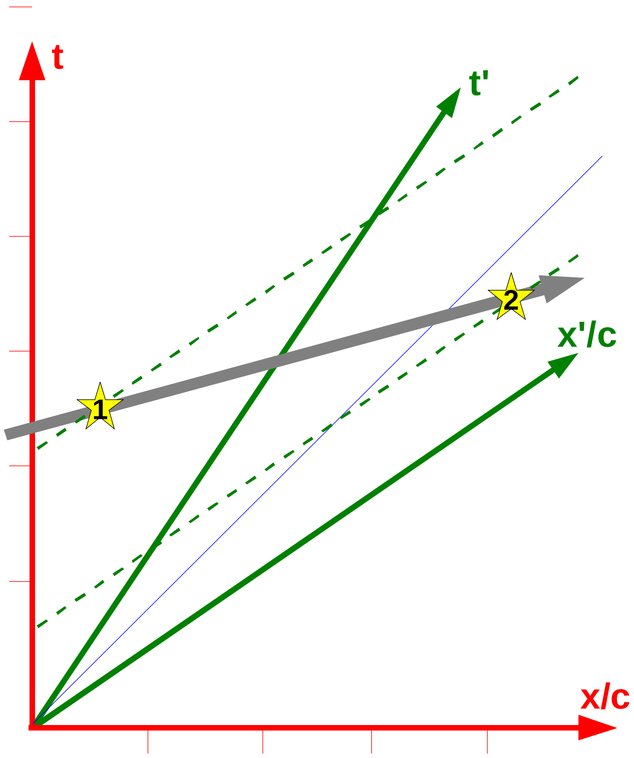
Graue Linie: Weltlinie eines Signals oder Objekts mit Überlichtgeschwindigkeit v > c.

☆ : zwei Ereignisse auf dieser Weltlinie (z.B. Geburt und Tod eines Lebewesens in einem Raumschiff mit Überlichtgeschw.)

ruhendes Inertialsystem:
Ereignis 1 **vor** Ereignis 2

schnell bewegtes Inertialsystem:
Ereignis 1 **nach** Ereignis 2!

Dies würde zu tatsächlich paradoxen Situationen führen (z.B. Zeitreisen oder Signalübertragungen in die Vergangenheit)



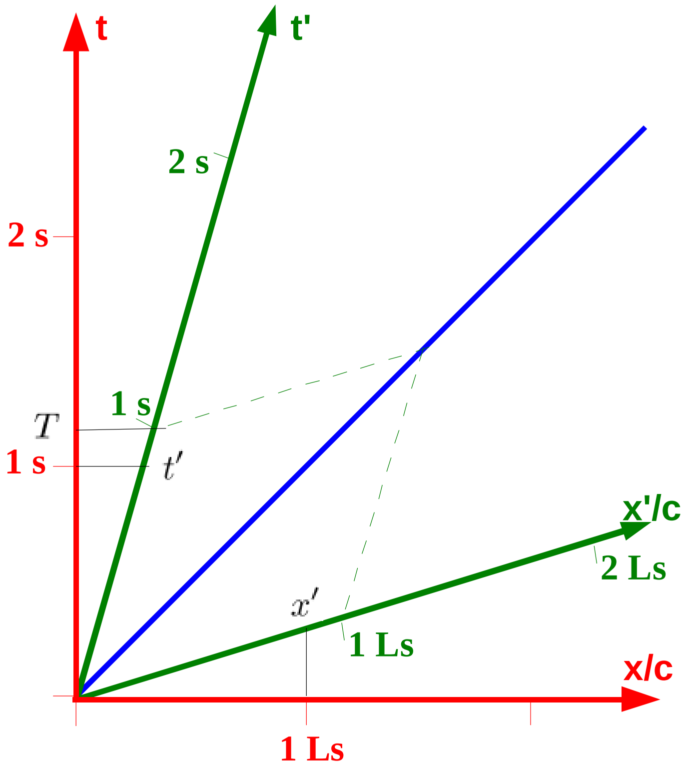
Die Zeitachsenskalierung ergibt sich aus der Zeitdilatation:

nach $t = 1$ s im ruhenden **Raumschiff 1** ist in **Raumschiff 2** erst die Zeit $t' = t\sqrt{1 - v^2/c^2} < t$ vergangen.

Umgekehrt: nach $T' = 1$ s in **Raumschiff 2** ist in **Raumschiff 1** bereits die Zeit $T = T'/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ vergangen.

Raumachsenskalierung analog:
die Strecke $x = 1$ Ls in **Raumschiff 1** erscheint in **Raumschiff 2** verkürzt:

$$x' = x\sqrt{1 - v^2/c^2}$$



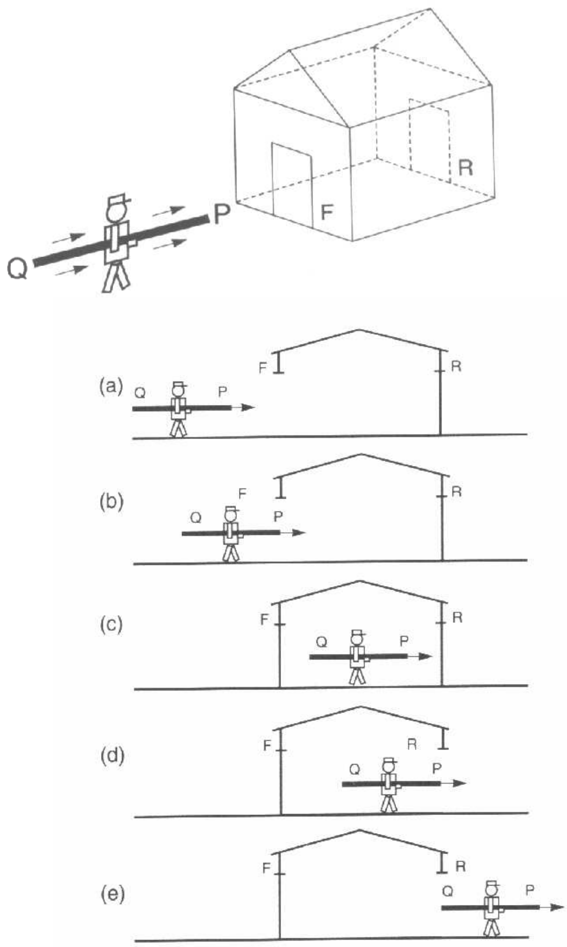
Beispiel Scheunen-„Paradoxon":

ein Mann mit langem Stab QP rennt mit Geschw. nahe c durch zwei Scheunentore FR.

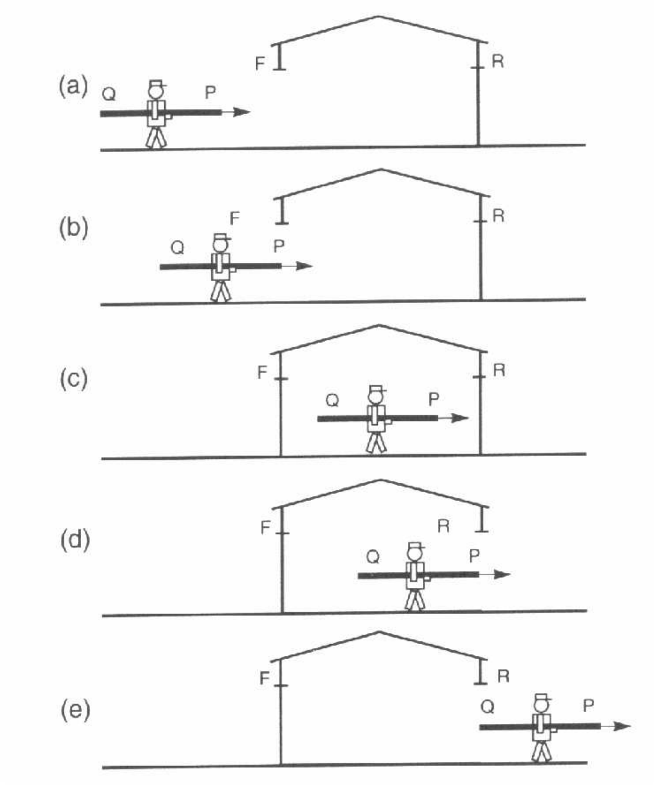
Der Abstand der Scheunentore im Ruhesystem der Scheune sei gleich der Stablänge im Ruhesystem des Stabs: FR = QP.

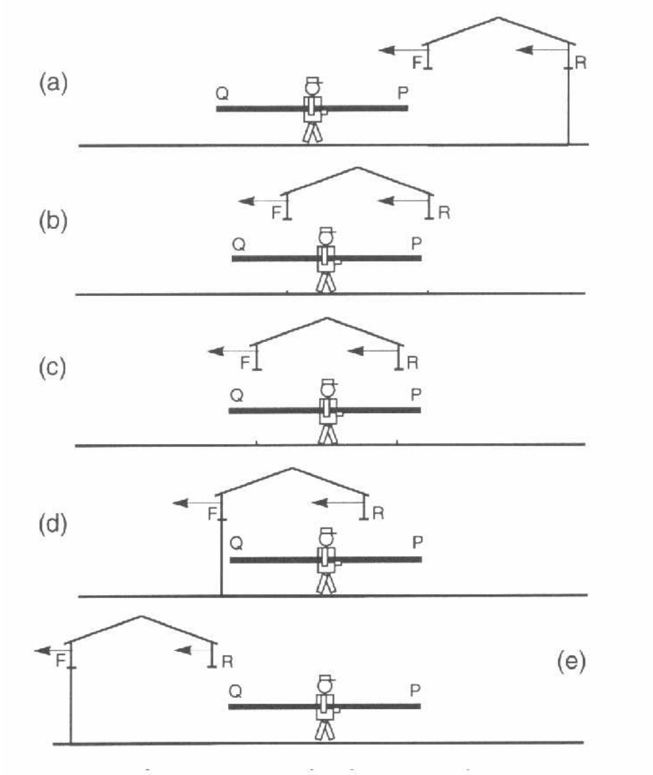
Passt der Stab in die Scheune?

Um dies festzustellen werden die Tore durch einen Bewegungsmelder nach / vor Durchschreiten der Tore geöffnet / geschlossen.



Bilder: http://itp.nat.uni-magdeburg.de/~kassner/srt/pseudoparadoxa

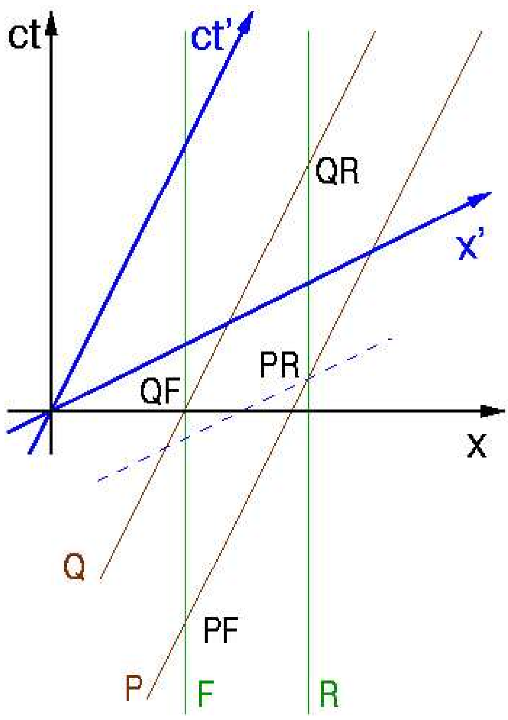




Aus Sicht der **Scheune** ist der **Stab verkürzt**, er passt vollständig in die Scheune

Aus Sicht des **Läufers** ist die **Scheune verkürzt**, der Stab passt **nicht** in die Scheune.

Darstellung im Raum-Zeit-Diagramm löst dieses Paradoxon:



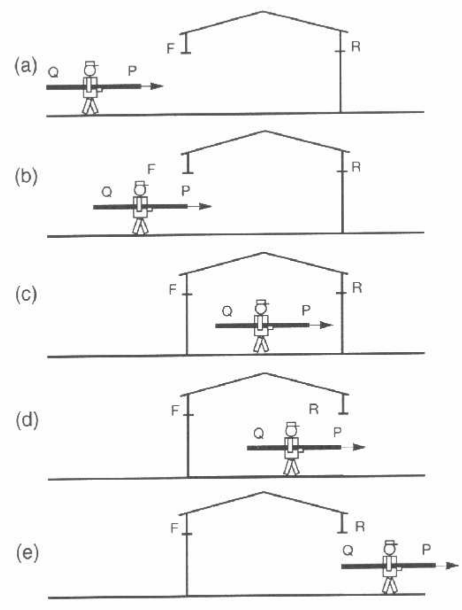
Für die **Scheune** geschehen die Ereignisse in der Reihenfolge

1. PF (Stabspitze betritt Scheune)

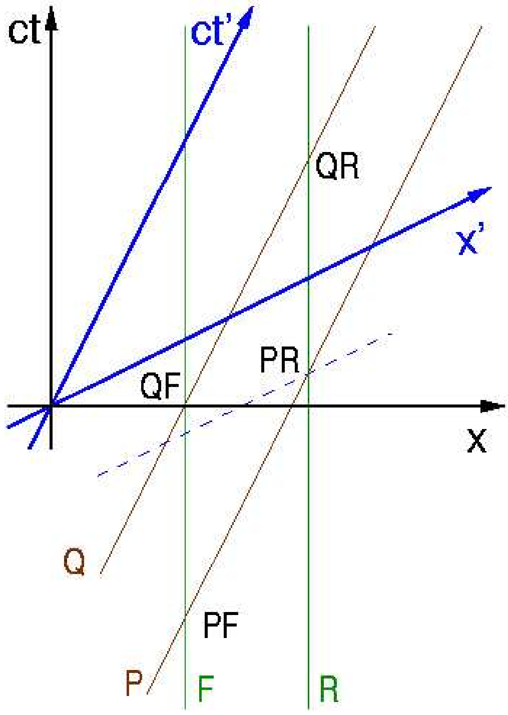
2. QF (Stab vollst. in der Scheune)

3. PR (Stabspitze verlässt Scheune)

4. QR (Stabende verlässt Scheune)



Bilder: http://itp.nat.uni-magdeburg.de/~kassner/srt/pseudoparadoxa



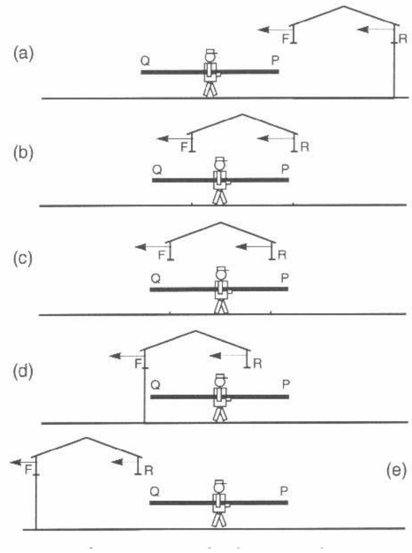
Für den **Läufer** geschehen die Ereignisse in einer **anderen Reihenfolge**

1. PF (Stabspitze betritt Scheune)

2. PR (Stabspitze verlässt Scheune)

3. QF (Stab vollst. in der Scheune)

4. QR (Stabende verlässt Scheune)



→ der Unterschied in der verschiedenen Wahrnehmung (nicht-)gleichzeitiger Ereignisse.

Bilder: http://itp.nat.uni-magdeburg.de/~kassner/srt/pseudoparadoxa

Beispiel Zwillings-„Paradoxon“:

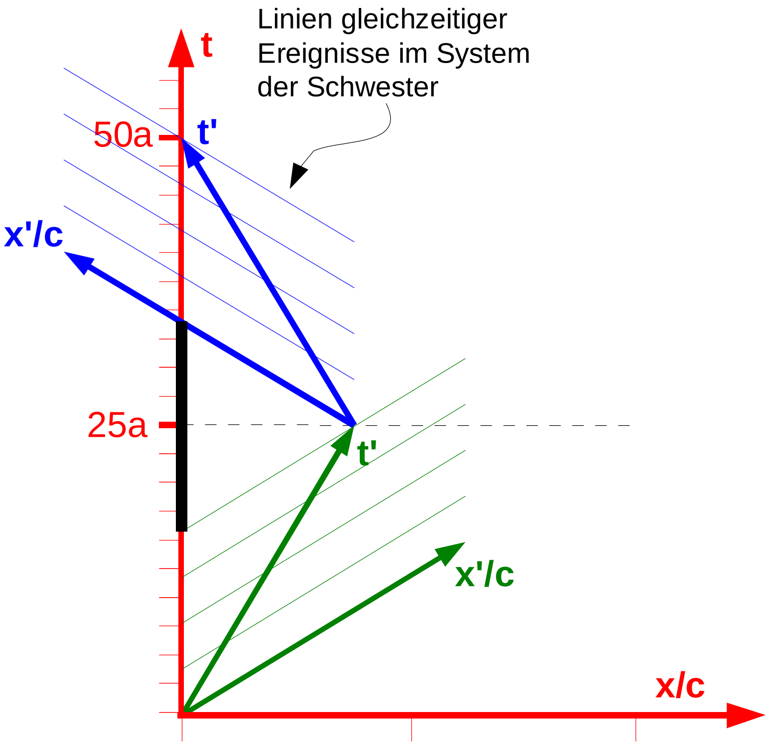
Wir betrachten ein Zwillingspaar, das auf der (gleichförmig bewegten) Erde lebt. Die Schwester startet auf eine lange Weltraumreise, bewegt sich dabei mit konstanter Geschwindigkeit 0,99 c, dreht nach 25 Jahren um und kehrt mit derselben Geschw. zurück.

Sicht des Bruders: Für ihn sind 50 Jahre vergangen, er sieht aber seine Schwester gleichförmig bewegt, so dass diese nur um $50\ \text{Jahre} \times \sqrt{1-0,99^2} = 7\ \text{Jahre}$ gealtert ist.

Sicht der Schwester: Die Schwester war in ihrem eigenen System in Ruhe und die Erde bewegte sich mit 0,99 c relativ zu ihr.
Sie müsste die umgekehrte Situation beobachten!

Wer ist nun älter bei der Rückkehr der Schwester zur Erde?

Betrachten Vorgang im Raum-Zeit-Diagramm:



Lösung:
für die Rückkehr muss die Schwester ihre **Bewegungsrichtung ändern** (beschleunigen), der Bruder **bleibt** in einem **gleichförmig bewegten Inertialsystem**

→ auf dem Rückweg befindet sie sich aber in einem **anderen Koordinatensystem.**

Linien gleichzeitiger Ereignisse zeigen einen zeitl. Bereich im Leben des Bruders, den die Schwester nie als „jetzt“ beobachtet.

→ der Bruder ist tatsächlich stärker gealtert.

6.7 Lorentz-Transformationen

Betrachten Lichtpuls im Ursprung beider Koordinatensysteme.

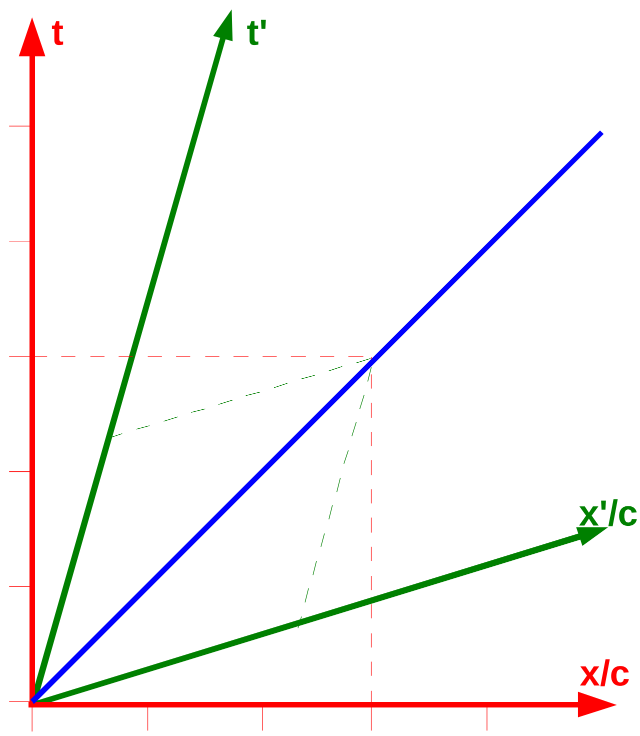
c ist in beiden Systemen gleich, deswegen ist die zurückgelegte Strecke des Lichtpulses nach einer gewissen Zeit:
$|\vec{r}| = c\,t \quad \text{und} \quad |\vec{r}\,'| = c\,t'$ bzw.:

$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ und

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$

wenn die beiden Inertialsysteme sich nur in x-Richtung zueinander bewegen, dann
$y = y' \quad \text{und} \quad z = z'$

Suchen Transformation, die diese Koordinatensysteme ineinander überführt.



Ansatz:
Lineare Beziehung, da Weltlinien ohne äußere Kräfte Geraden sind (d.h. es treten keine Beschleunigungen auf).
$x = \gamma(v,c)\,(x' + v\,t')$, mit einer noch zu definierenden Funktion $\gamma(v,c)$

Dreht man die Beobachter um, so bewegt sich **Beobachter A** mit $-v$ relativ zu **Beobachter B**: $x' = \gamma(v,c)\,(x - v\,t)$

Einsetzen x' in $x = \gamma(v,c)\,(x' + v\,t')$ liefert: $t' = \gamma\left(t + \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}\,\frac{x}{v}\right)$

Einsetzen in $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ liefert: $\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2\left(t + \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}\,\frac{x}{v}\right)^2$

Umformen und Vergleich mit $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$

$$\underbrace{\left(\gamma^2 - c^2\frac{(1-\gamma^2)^2}{v^2\gamma^2}\right)}_{\text{muss } =1} x^2 - 2\underbrace{\left(v\gamma^2 + \frac{c^2}{v}(1-\gamma^2)\right)}_{\text{muss } =0} xt + y^2 + z^2 = \underbrace{\left(c^2\gamma^2 - v^2\gamma^2\right)}_{\text{muss } =c^2} t^2$$

Lösung: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Lorentz-Transformationen:

von **System 1** nach **System 2**:

$$\begin{aligned} z' &= z \\ y' &= y \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' &= \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

von **System 2** nach **System 1**:

$$\begin{aligned} z &= z' \\ y &= y' \\ x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t &= \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

für v << c gehen diese Transformationen über in die Galilei-Transformationen.

(Die angegebene Lorentz-Transf. ist nur ein Spezialfall für Bewegungen in x-Richtung, für allgemeine Bewegungen $v = (v_x, v_y, v_z)$ müssen natürlich alle Koordinaten entsprechend der Geschw.komponenten transformiert werden.)

Addition von Geschwindigkeiten:

Ein weiteres Objekt bewege sich mit u_x in **System 1**, bzw. mit u_x' in **System 2**:

Es gilt: $u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ und $u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma(\Delta t - (v/c^2)\Delta x)} = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x}$

Da sich die Zeit ändert, ändern sich auch die beiden anderen beiden Geschwindigkeitskomponenten:

$u'_y = \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - (v/c^2)\Delta x)} = \frac{u_y}{\gamma(1-(v/c^2)u_x)}$ und analog: $u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1-(v/c^2)u_x)}$

Man erkennt:

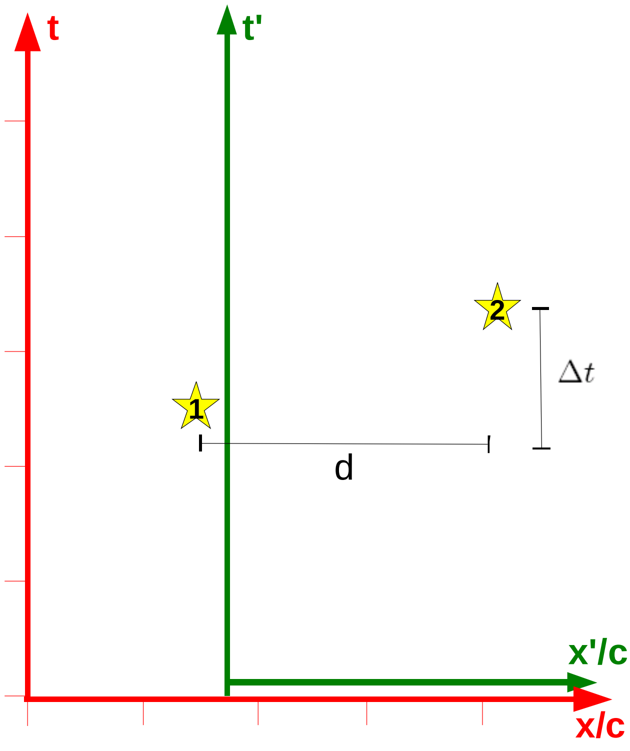
1. wenn $u=c$ dann auch $u'=c$ und umgekehrt;

2. falls $u<c$ und $v<c$ dann auch $u'<c$;
es treten **keine Überlichtgeschwindigkeiten** auf!

2. für $v << c$ gelten die bisherigen Newtonschen / Galileischen Transformationen.

Invarianz des Raum-Zeitintervalls:

Betrachten zwei Ereignisse
$E_1(x_1, y_1, z_1; t_1)$ und $E_2(x_2, y_2, z_2; t_2)$



Newtonsche Physik:
In allen Koordinatensystemen sind räumlicher und zeitlicher Abstand gleich:

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 \\ &= (x'_1-x'_2)^2 + (y'_1-y'_2)^2 + (z'_1-z'_2)^2 \\ \Delta t^2 &= (t_1-t_2)^2 = (t'_1-t'_2)^2 \end{aligned}$$

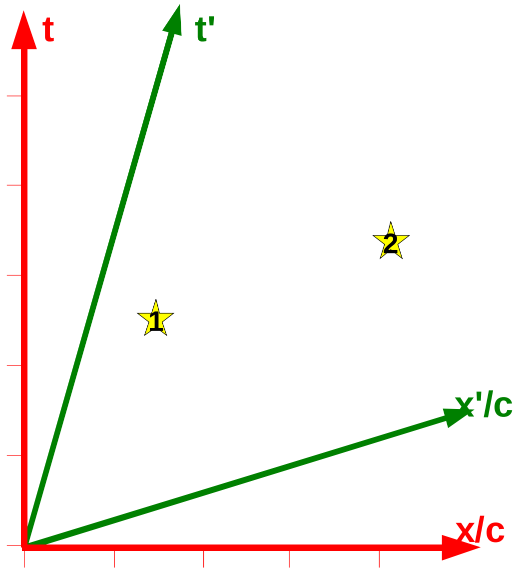
nach **Lorentz-Transformation** erkennt man:

$$\begin{aligned}
\Delta s^2 &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\
&= c^2\gamma^2(\Delta t' + (v/c^2)\Delta x')^2 \;-\; \gamma^2(\Delta x' + v\Delta t')^2 \;-\; \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\
&= c^2\gamma^2(1 - v^2/c^2)\Delta t'^2 - \gamma^2(1 - v^2/c^2)\Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\
&= c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\
&= \Delta s'^2
\end{aligned}$$

Das Raumzeitintervall

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

ist in allen Inertialsystemen konstant.



Zeitartige Intervalle: $\Delta s^2 > 0$

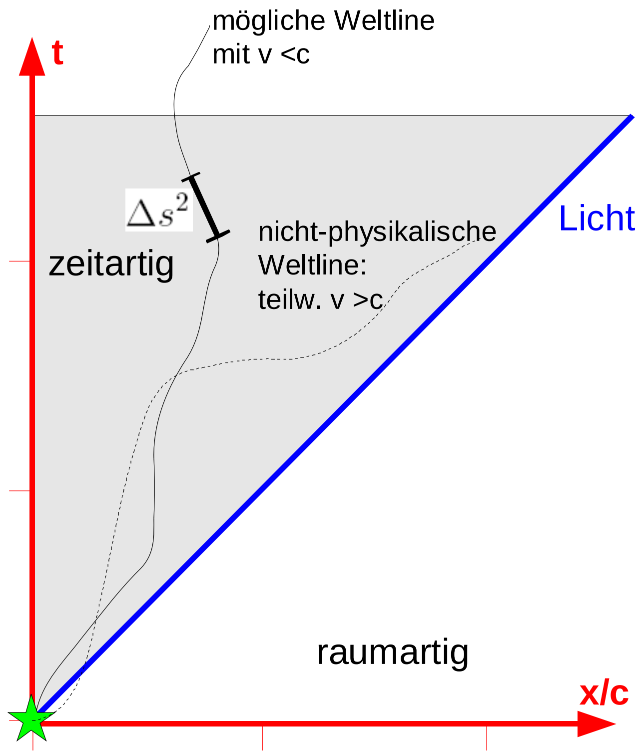
Dies sind Ereignisse die sich kausal beeinflussen können.

Es gibt Inertialsysteme, in denen die Ereignisse nur zeitlich getrennt sind.

Physikalische Objekte bewegen sich entlang von Weltlinien, an denen für jedes Linienelement $\Delta s^2 > 0$ gilt

Raumartige Intervalle: $\Delta s^2 < 0$

Dies sind Ereignisse die sich <u>nicht</u> kausal beeinflussen können. Sie sind in allen Inertialsystemen räumlich getrennt.

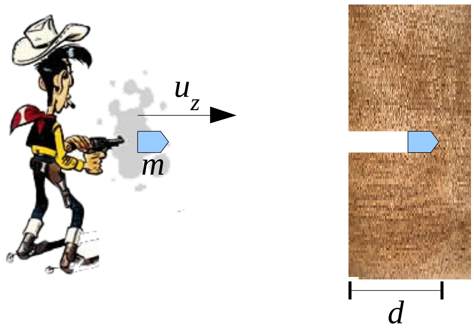


6.8 Relativistische Massenzunahme

Gedankenexperiment:

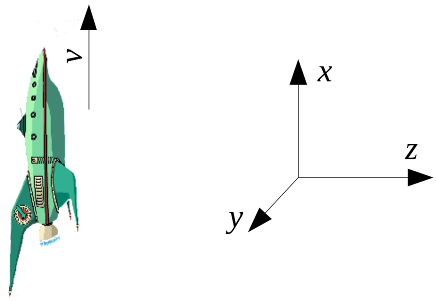
Eine Pistolenkugel wird in ein (homogenes) Holzbrett geschossen. Die Eindringtiefe, wie sie der Schütze sieht, hängt (abgesehen vom Material → Konstante k) wesentlich vom Impuls der Kugel ab:

$$d = k\, p_z = k\, m\, u_z$$



Ein weiterer Beobachter bewege sich mit hoher Geschwindigkeit v in x-Richtung.

Er sieht **dieselbe Eindringtiefe** (in z-Richtung), da nur Distanzen in Bewegungsrichtung (x) Lorentz-kontrahiert sind. Er beobachtet also **denselben Impuls.**



Aber: Die von ihm beobachtete Geschwindigkeit der Kugel transformiert sich gemäß:

$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1-(v/c^2)u_x)} = \frac{u_z}{\gamma} = u_z\sqrt{1-v^2/c^2}$$

Da er dieselbe Eindringtiefe sieht, folgert daraus:

$$\begin{aligned} d &= \underline{k\, m\, u_z} = \\ = d' &= k\, m'\, u_z' = \underline{k\, m'\, u_z\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Der Vergleich liefert:

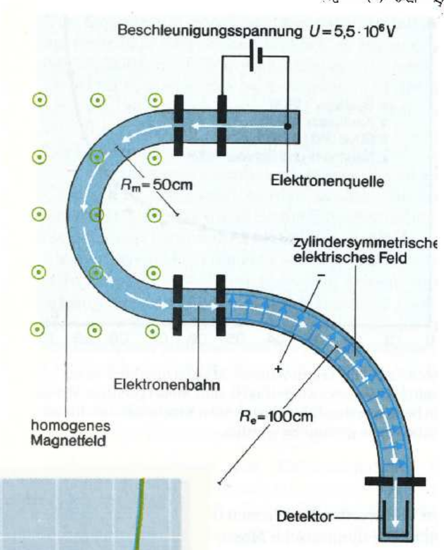
Die Masse eines bewegten Körpers ist größer als seine Ruhemasse:

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Der **Impuls** eines mit v bewegten Objekts der Ruhemasse m_0 ist demnach:

$$\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v} = \frac{m_0\,\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Experimentelle Bestätigungen der Massenzunahme:



Elektronen werden im E- und B-Feld auf Kreisbahnen beschleunigt:

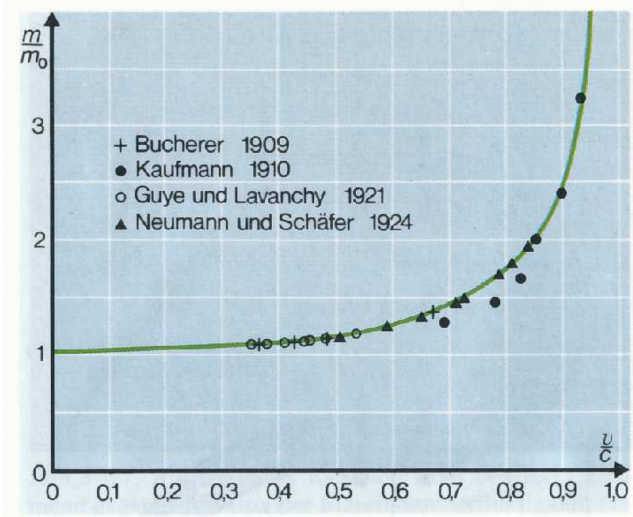
→ auftretende Kräfte: $F_e = eE = mv^2/R_e$

$$F_m = evB = mv^2/R_m$$

→ nur Elektronen mit $v = \dfrac{ER_e}{BR_m}$ und

$$m = e\frac{B^2R_m^2}{ER_e}$$

gelangen zum Detektor



[Bilder:Metzler Physik]

6.9 Relativistische Energie

Wir betrachten die Massenzunahme im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 + \frac{1}{2}m_0\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^4} + \dots$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit c^2:

$$m\ c^2 = m_0\ c^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m_0\ v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \dots}_{E_{\text{kin}}}$$

der Ausdruck enthält einen
(a) geschwindigkeitsunabhängigen Term: $m_0\ c^2$ und einen
(b) geschw.abh. Term: $\frac{1}{2}m_0\ v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \dots$, der im Grenzfall die Newtonsche kinetische Energie ergibt, $\frac{1}{2}m_0\ v^2$.

Interpretation:

Gesamtenergie = Ruheenergie + kinetische Energie

$$m\,c^2 = m_0\,c^2 + m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

Folgerungen:

1. einem bewegten Körper mit einer **Gesamtenergie** kann nach dieser Beziehung stets eine **Masse *m* zugeordnet** werden.
Masse und Energie sind äquivalente Größen.

2. massive Körper besitzen auch in Ruhe eine **Ruheenergie** entsprechend ihrer Ruhemasse m_0.

Die **Gesamtenergie** kann auch mithilfe des relativistischen Impulses geschrieben werden als:

$$E_{\text{ges}} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Folgerungen/Auswirkungen:

1. Will man einen massiven Körper auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigen, so müsste man unendlich viel Energie aufbringen ($E_{\text{kin}} \to \infty$)
→ **keine Überlichtgeschwindigkeit möglich**.

2. In Atomkernen haben die **gebundenen Protonen & Neutronen** eine niedrigere Energie als die freien Teilchen. Dies äußert sich in einer **niedrigeren Masse**.

Beispiel: Alpha-Teilchen (2p+2n), Masse m_α = 6,644 * 10^{-27} kg
Gesamtmasse der einzelnen Teilchen: $m = 2\,m_p + 2\,m_n$ = 6,694 * 10^{-27} kg

Ähnliches (wenn auch mit kleinerem Effekt), tritt auch für Atome (e^- + Kern) oder Moleküle (Atom A+Atom B) auf

3. **Energie und Materie** können auch direkt **ineinander umgewandelt** werden,

Vernichtung von Teilchen und Antiteilchen, bei der die gesamte Masse in elektromagnetische Energie umgewandelt werden kann:

zB.: ein Positron („Antielektron“, selbe Ruhemasse, positive Ladung +e, entsteht zB. in radioakt. Zerfällen oder in der Atmosphäre aufgrund kosmischer Strahlung)
und ein Elektron können sich unter Abstrahlung zweier Photonen (γ) mit einer Energie von je 511 keV vernichten:

$$e^- + e^+ \longrightarrow 2\gamma$$

Entstehung neuer Teilchen in Stoßprozessen (in Teilchenbeschl.):

zB. Zusammenstoß von Protonen hoher Energie kann ein massives Pi-Meson erzeugen:

p + p (E_{kinet} groß)$\longrightarrow$ p + p (E_{kinet} klein) + π^0

(π^0: Pi-Meson, Ruhemasse 468 MeV/c², Ladung 0)